Programme de colle n° $1^2+2^2+3^2+4^2$

semaine du 1^2+3^2 au $1^2+2^2+3^2$ juin

Notions vues en cours

Chapitre 35 : Indépendance, conditionnement *(en complément de la semaine précédente)*

- Événements indépendants, caractérisation $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$, caractérisation $\mathbb{P}(A \mid \overline{B}) = \mathbb{P}(A)$
- Événements indépendants 2 à 2, événements mutuellement indépendants, le second entraine le premier
- Notation $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B)$, notation $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$, v.a. indépendantes (pour 2 variables, pour n variables), notation $X \perp\!\!\!\perp Y$
- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, cela entraine (quand $\mathbb{P}(Y = y) > 0$) que $\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \mathbb{P}(X = x)$
- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$, généralisation à n variables indépendantes avec n fonctions, lemme des coalitions
- La somme de n v.a. indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ est une v.a. qui suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$
- Couple de v.a., loi conjointe, lois marginales, déduction des lois marginales à partir de la loi conjointe, si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors les lois marginales du couple (X,Y) permettent de reconstruire la loi conjointe

Chapitre 36 : Espérance, variance

- Espérance : définition (pour une v.a. réelle ou complexe), notation $\mathbb{E}(X)$, linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaires
- Calcul d'espérance pour les lois usuelles, v.a. (presque surement) constante ($\exists a \in X(\Omega) \quad \mathbb{P}(X = a) = 1$) : l'espérance vaut a, v.a. centrée
- Formule de transfert, espérance d'un produit de v.a. indépendantes
- Variance : définition (pour une v.a.r.), notation $\mathbb{V}(X)$, réécriture avec $\mathbb{E}(X^2)$, variance de aX, de $X + b$, variance des lois usuelles
- Écart-type, notation $\sigma(X)$, v.a.r. centrée réduite, si $\sigma(X) > 0$, alors on peut construire une v.a.r. centrée réduite à partir de X
- Covariance : définition, notation $\mathrm{Cov}(X,Y)$, interprétation, v.a. positivement / négativement corrélées, réécriture avec $\mathbb{E}(XY)$
- Propriétés de la covariance : bilinéarité, symétrie, $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathbb{V}(X)$; identité remarquable pour le calcul de $\mathbb{V}(X+Y)$
- V.a. décorrélées, deux v.a. indépendantes sont décorréelées mais la réciproque est fausse

Les inégalités probabilistes ne sont pas au programme.

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **34 à 36 (jusqu'à la section 3 incluse)**. *Des exemples de questions figurent ci-après.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Définition de l'espérance, formule de transfert (sans démonstration), donner l'espérance des trois lois usuelles $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$, $\mathcal{B}(p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$. On n'en démontrera qu'une, au choix de l'examinateur Chapitre 36, Définition 36.1, Théorème 36.7, Propriété 36.2, cf également le TD, exercice 22 q. 1) pour la loi uniforme
2. Définition de la variance, réécriture (avec démonstration), puis variances des lois $\mathcal{B}(p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$ (sans démonstration), et enfin expression de $\mathbb{V}(aX+b)$ en fonction de $\mathbb{V}(X)$ (sans démonstration) Chapitre 36, Définition 36.9, Propriétés 36.10 à 36.13
3. Covariance : définition, réécriture (avec démonstration), puis propriétés de la covariance (sans démonstration), et enfin l'identité remarquable de la covariance (sans démonstration) Chapitre 36, Définitions 36.17, Propriétés 36.18 à 36.20

Exemples de questions libres :

Chapitre 34 :

- Donner 4 propriétés d'une probabilité : ou bien qui font partie de la définition, ou bien qui se déduisent directement de la définition (sans hypothèse supplémentaire)
- Qu'appelle-t-on une distribution de probabilités sur un univers Ω ?
- Soit X, Y deux v.a. définies sur un même ensemble Ω. Donner la définition ou une caractérisation de l'assertion "X et Y suivent la même loi"
- Si X suit une loi uniforme sur un ensemble E fini, quelles sont les valeurs que peut prendre X ? Quelle est la loi de X ?
- Si X suit une loi binomiale de paramètre (n,p), quelles sont les valeurs que peut prendre X ? Quelle est la loi de X ?

Chapitre 35 :

- Compléter la formule des probabilités composées : $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) =$ ....
- Compléter la formule de Bayes : $\mathbb{P}(B \mid A) =$ ....
- Donner la définition de "les évènements $A_1, \cdots, A_n$ sont mutuellement indépendants"
- Soit X, Y deux v.a. Donner la définition ou une caractérisation de l'assertion "X et Y sont indépendantes".
- Soit (X, Y) un couple de v.a. Expliquer ce que sont la loi conjointe et les lois marginales.

Chapitre 36 :

- Soit X une v.a.r. et $a, b \in \mathbb{R}$. Compléter les formules suivantes : $\mathbb{E}(aX+b) =$ .... et $\mathbb{V}(aX+b) =$ ....
- Soit X, Y deux v.a. Comment peut-on exprimer (et sous quelles conditions) $\mathbb{E}(XY)$ en fonction de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{E}(Y)$?
- Si X est une v.a.r. de variance non nulle, donner une v.a. Y centrée réduite construite à partir de X
- Soit X, Y deux v.a. Donner la définition de "X, Y sont décorrélées". Quel lien peut-on faire avec "X, Y sont indépendantes" ?
- Soit X, Y deux v.a., on suppose que X est presque sûrement égale à $a \in \mathbb{R}$. Que valent $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$?